POLYNÔMES

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \quad \text{est un polynôme de d° } n \text{ si } a_n\neq 0$$

Les réels a_k s'appellent les *coefficients* de P. a_kx^k est un *monôme.*

Factorisation par (x-a)

Méthode 1 : division

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 \qquad\qquad + x + 3 & \underline{\quad x + 1 \quad} \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2)} \qquad\qquad & 2x^2 - 2x + 3 \\
-2x^2 + x + 3 & \\
\underline{-(-2x^2 - 2x)} & \\
3x + 3 & \\
0 &
\end{array}
$$

$$2x^3 + x + 3 = (x+1)(2x^2 - 2x + 3)$$

Méthode 2 : identification

On veut que pour tout réel x : $2x^3 + x + 3 = (x+1)(2x^2 + ax + 3)$

Or $(x+1)(2x^2 + ax + 3) = 2x^3 + (a+2)x^2 + (3+a)x + 3$

Donc : $\begin{cases} a+2=0 \\ 3+a=1 \end{cases}$ $a=-2$ Finalement : $2x^3 + x + 3 = (x+1)(2x^2 - 2x + 3)$

Méthode 3 : "maison"

$2x^3 + x + 3 = (x+1)(2x^2$

J'ai $2x^2$, j'en veux 0, donc j'en mets -2; je baisse d'un degré

$2x^3 + x + 3 = (x+1)(2x^2 - 2x$

J'ai -2x, j'en veux 1, donc j'en mets 3; je baisse d'un degré

$2x^3 + x + 3 = (x+1)(2x^2 - 2x + 3)$

Théorème fondamental

P est divisible par (x-a) <=> a est une racine de P

(une racine de P est un réel a tel que P(a)=0)

Un polynôme peut se factoriser bien qu'il n'admette aucune racine réelle :
$$x^4 + 1 = \left(x^2+\sqrt{2}\,x + 1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x + 1\right)$$

Un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.

Si P est divisible par $(x-a)^k$, on dit que a est une racine multiple de P. *(de multiplicité k)*